

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ 2004

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$ είναι ίση με 0
Μονάδες 8

B. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.
Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής X είναι αρνητικός αριθμός
 β. Στην κανονική κατανομή το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$, όπου \bar{x} είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και s η τυπική τους απόκλιση.

γ. Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα v_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής X με το μέγεθος n του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i .

Μονάδες 6

Δ. Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Στη **Στήλη I** αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη **Στήλη II** σχέσεις διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Να γράψετε στο τετράδιο σας τα γράμματα της **Στήλης I** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II** που αντιστοιχεί στην ίδια διατύπωση.

	Στήλη I		Στήλη II
α	Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B	1	$A \cap B$
β.	Πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B	2	$A - B$
γ.	Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B	3	$(A \cup B)'$
		4	$A \cup B$

Στη στήλη II περισεύει μια σχέση

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

Μονάδες 10

B. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3^ο

Στην «Αττική οδό» εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν απο 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα απο τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα:

Κλάσεις σε χλμ.	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα n_i σε χιλ. οχήματα	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i σε χιλ. οχήματα.	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα $F_i\%$
[5, 15)		60			
[15, 25)					68
[25, 35)				180	
[35, 45)					
Σύνολο		200			

A. Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών.

Μονάδες 10

B. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα $(x_i, f_i\%)$ και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

Μονάδες 5

Γ. Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x}

Μονάδες 5

Δ. Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10$. Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του x , στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

A. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$

Μονάδες 9

B. Για τις παραπάνω τιμές των $P(A)$, $P(B)$ καθώς και για $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, να βρείτε τις

πιθανότητες:

i. $P(A \cap B)$

ii. $P(A - B)$

iii. $P[(A \cap B)']$

iv. $P[(A - B) \cup (B - A)]$.

Μονάδες 16

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ 2004

- A.** Θεωρία βιβλίου σελ. 28
B. Θεωρία βιβλίου σελ. 16
Γ. α. Λάθος
 β. Λάθος
 γ. Σωστό
Δ. α. 4
 β. 2
 γ. 1

ΘΕΜΑ 2^ο

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$$

A. Πρέπει $x \geq 0$ και $\sqrt{x} - \sqrt{3} \neq 0$

Άρα $D_f = [0,3) \cup (3,+\infty)$

B.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{x-3} =$$

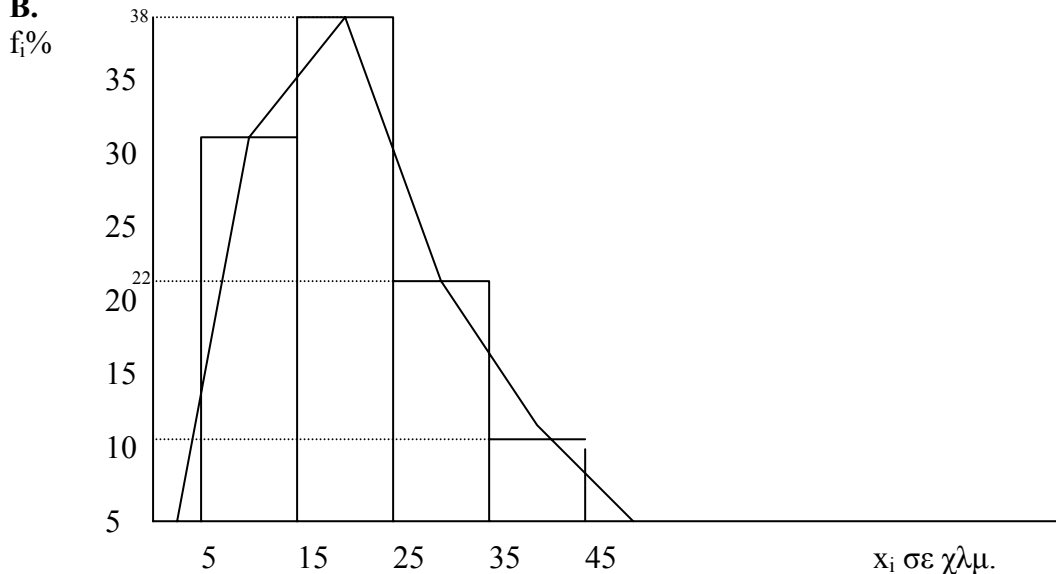
$$\lim_{x \rightarrow 3} [(x-1)(\sqrt{x} + \sqrt{3})] = (3-1)(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

A.

Κλάσεις σε χλμ	Κέντρο κλάσης x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5, 15)	10	60	30	60	30
[15, 25)	20	76	38	136	68
[25, 35)	30	44	22	180	90
[35, 45)	40	20	10	200	100
Σύνολο		200	100		

B.



$$\Gamma. \bar{x} = \frac{10 \cdot 60 + 20 \cdot 76 + 30 \cdot 44 + 40 \cdot 20}{200}$$

$$= \frac{600 + 1520 + 1320 + 800}{200}$$

$$= \frac{4240}{200} = 21,2 \text{ χλμ}$$

Δ. Όσα ανήκουν στις δύο τελευταίες κλάσης άρα $v_3 + v_4 = 44 + 20 = 64$ χιλ. Αυτοκίνητα. Άρα 64.000 αυτοκίνητα διανύουν τουλάχιστον 25 χιλιόμετρα.

ΘΕΜΑ 4^ο




A. $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10$

$$f'(x) = 6x^2 - 5x + 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ή } x = \frac{1}{3}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3} \text{ ή } x > \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)					

Άρα f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = \frac{1}{3}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = \frac{1}{2}$

Άρα $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$

B. $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$

i. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) - P(A \cup B) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

ii. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$P(A - B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A - B) = \frac{1}{3}$$

iii. $P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P[(A \cap B)'] = 1 - \frac{1}{6} \Leftrightarrow$

$$P[(A \cap B)'] = \frac{5}{6}$$

iv. $P[(A-B) \cup (B-A)] = (A-B, B-A \text{ ασυμβίβαστα})$

$$P(A-B) + P(B-A) =$$

$$P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \Leftrightarrow$$

$$P[(A-B) \cup (B-A)] = \frac{1}{2}$$