

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓ. ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ**  
**ΤΕΤΑΡΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004**

**ΘΕΜΑ 1°**

Εξετάσαμε δείγμα 25 οικογενειών μιας πόλης, ως προς τον αριθμό των παιδιών τους. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός παιδιών $x_i$	Συχνότητα $V_i$	Αθροιστική Συχνότητα	Σχ. Συχνότητα (%) $f_i$
0	4		
1			
2	5		
3	4		
4	3		
5	2		
Αρθροίσιμα			

α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

**Μονάδες 5**

β) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

**Μονάδες 5**

γ) Να βρείτε τη διάμεσο.

**Μονάδες 5**

δ) Πόσες οικογένειες έχουν μέχρι και τρία παιδιά;

**Μονάδες 5**

ε) Πόσες οικογένειες έχουν μέχρι και δύο παιδιά;

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 2°**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 2x-18 & x > 9 \\ \sqrt{x-3} & x > 9 \\ \lambda x+3 & x \leq 9 \end{cases}$  όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 9^+} f(x)$

**Μονάδες 12**

β) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x)$

**Μονάδες 5**

γ) Να βρείτε το  $\lambda$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0=9$

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 3°**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + ax + \beta \text{ με } a, \beta \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 5**

β) Αν  $f'(1) = 0$  και  $f(2) = 5$ , να βρείτε τα  $a$  και  $\beta$ .

**Μονάδες 10**

γ) Για τις τιμές των  $a$  και  $\beta$  που βρήκατε στο ερώτημα (β), να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονotonία.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Το άθροισμα του μήκους και του πλάτους ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, είναι 200 μέτρα. Αν το μήκος του είναι  $x$  μέτρα:

**α)** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του  $x$  δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = -x^2 + 200x$$

**Μονάδες 5**

**β)** Για ποια τιμή του  $x$  το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο;

**Μονάδες 10**

**γ)** Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

**Μονάδες 10**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

α)  $\sum_{i=1}^6 v_i = v \Leftrightarrow 18 + v_2 = 25 \Leftrightarrow v_2 = 7$

Αριθμός παιδιών $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Αθροιστική Συχνότητα $N_i$	Σχ. Συχνότητα (%) $f_i$ (%)
0	4	4	16
1	7	11	28
2	5	16	20
3	4	20	16
4	3	23	12
5	2	25	8
Αθροίσματα	25		100

β) Επικρατούσα τιμή είναι η  $x_2 = 1$ , δηλαδή  $M_0 = 1$ .

γ) Η διάμεσος είναι η 13<sup>η</sup> παρατήρηση. Άρα  $\delta = 2$ .

δ) Μέχρι και 3 παιδιά έχουν 20 οικογένειες ( $N_4$ ).

ε) Μέχρι και 2 παιδιά έχουν 16 οικογένειες ( $N_3$ ).

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

α) 
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2x - 18}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x})^2 - 3^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}{x - 9} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 9^+} [2(\sqrt{x} + 3)] = 2(\sqrt{9} + 3) = 12 \end{aligned}$$

β)  $f(9) = \lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^-} (\lambda x + 3) = \lambda \cdot 9 + 3 = 3(3\lambda + 1)$

γ) Για να είναι συνεχής στο  $x_0 = 9$  πρέπει  $\lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = f(9)$   
Άρα  $3(3\lambda + 1) = 12 \Leftrightarrow 3\lambda + 1 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 1$

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

α)  $f'(x) = (2x^3 - 9x^2 + \alpha x + \beta)' =$   
 $= 6x^2 - 18x + \alpha$

β)  $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow -12 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 12$

$f(2) = 5 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + \alpha \cdot 2 + \beta = 5 \Leftrightarrow 16 - 36 + 2 \cdot 12 + \beta = 5 \Leftrightarrow$  (α = 12)  
 $\Leftrightarrow 4 + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 1$

γ) Για  $\alpha = 12, \beta = 1$  η συνάρτηση γίνεται:

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$  ή  $x = 2$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$  ή  $x > 2$  και  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗		↘		↗
		T.M.	T.E.		

Στο διάστημα  $(-\infty, 1]$  και στο  $[2, +\infty)$  είναι γνησίως αύξουσα ενώ στο  $[1, 2]$  γνησίως φθίνουσα.

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

α) Έστω y το πλάτος. Τότε έχω:

$x + y = 200 \Leftrightarrow y = 200 - x$  (1)

$E = x \cdot y \Leftrightarrow E = x(200 - x)$

Άρα  $E(x) = -x^2 + 200x$

Επειδή  $x > 0$  και  $y > 0 \Leftrightarrow x > 0$  και  $200 - x > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$  και  $x < 200 \Leftrightarrow 0 < x < 200$

Το πεδίο ορισμού είναι το  $(0, 200)$



β)  $E'(x) = (-x^2 + 200x)' = -2x + 200 = -2(x - 100)$

$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 100$

$E'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 100 < 0 \Leftrightarrow x < 100$

και

$E'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 100$

x	0	100	200
E'(x)	+	0	-
E(x)			

Μέγιστο

Για  $x = 100$  το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο.

- γ) Η μέγιστη τιμή του οικοπέδου είναι:  
 $E(100) = -100^2 + 200 \cdot 100 = -10000 + 20000 = 10000 \text{ m}^2$

Επιμέλεια απαντήσεων των θεμάτων:  
Δ. Χατζόπουλος, Ε. Χατζηαντωνίου,  
Γ. Περδίκης, Δ. Νικολάου