

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι:

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Μονάδες 8,5

A.2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις και να συμπληρώσετε καθεμιά από αυτές με το κατάλληλο σύμβολο, ($=$, $\leq$, $\geq$) έτσι ώστε να είναι αληθής:

α. $P(A') \dots 1-P(A)$

Μονάδες 2

β. αν $A \subseteq B$ τότε $P(B) \dots P(A)$.

Μονάδες 2

B.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και A' το αντίθετο του ενδεχομένου A.

α. Αν $A' \subseteq B$ τότε $P(A) + P(B) < 1$.

β. Αν $P(A) = P(A')$ τότε $2P(A) = P(\Omega)$.

Μονάδες 4

B.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν $A \subseteq B$, $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B) = \frac{5}{12}$ τότε η $P(A \cup B)$ είναι ίση με:

α. $\frac{1}{4}$ **β.** $\frac{5}{12}$ **γ.** $\frac{2}{3}$ **δ.** $\frac{1}{6}$.

Μονάδες 2,5

B.3. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και ισχύει ότι $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $P(A-B)$	1. $\frac{1}{20}$
β. $P((B-A)')$	2. $\frac{2}{15}$
γ. $P((A \cap B)')$	3. $\frac{4}{5}$
	4. $\frac{1}{12}$
	5. $\frac{19}{20}$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A.1. Σχολ. Βιβλίο σελ. 152 (κανόνας λογισμού πιθανοτήτων)

A.2. α. $P(A') = 1 - P(A)$

β. αν $A \subseteq B$ τότε $P(B) \geq P(A)$

B.1. α. Αν $A' \subseteq B$ τότε $P(A) + P(B) < 1$

Λάθος

Γιατί: $A' \subseteq B$ τότε $P(A') \leq P(B)$ ή $1 - P(A) \leq P(B)$
ή $P(A) + P(B) \geq 1$

β. Αν $P(A) = P(A')$ τότε $2P(A) = P(\Omega)$

Σωστό

γιατί: $P(A) + P(A') = P(\Omega)$

επειδή: $P(A) = P(A')$ προκύπτει ότι $2P(A) = P(\Omega)$

B.2. Αν $A \subseteq B$, $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B) = \frac{5}{12}$ τότε η $P(A \cup B)$ είναι ίση με:

β. $\frac{5}{12}$

επειδή: $A \subseteq B$ θα είναι $P(A \cup B) = P(B) = \frac{5}{12}$

B.3.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $P(A - B)$	2. $\frac{2}{15}$
β. $P((B - A)')$	5. $\frac{19}{20}$
γ. $P((A \cap B)')$	3. $\frac{4}{5}$

α. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

β.

$$\begin{aligned} P[(B - A)'] &= 1 - P(B - A) = 1 - [P(B) - P(A \cap B)] = \\ &= 1 - P(B) + P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} \end{aligned}$$

γ. $P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin x + \eta \mu x$.

- A.** Να αποδείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0$.

Μονάδες 8

- B.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$.

Μονάδες 8

- Γ.** Να βρείτε την τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\lambda f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$f(x) = \sin x + \eta \mu x$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

- A.** Έχουμε: $f'(x) = -\eta \mu x + \sin x$
 $f''(x) = -\sin x - \eta \mu x$

$$\text{Οπότε: } f(x) + f''(x) = \sin x + \eta \mu x - \sin x - \eta \mu x = 0$$

- B.** Έστω ότι η ζητούμενη εφαπτομένη είναι:

$$(\epsilon): y = \lambda x + \beta$$

$$\text{έχουμε: } \lambda = f'(0) = -\eta \mu 0 + \sin 0 = 1$$

όμως το $A(0,1)$ είναι σημείο και της ευθείας (ϵ) . Άρα:

$$1 = 1 \cdot 0 + \beta$$

$$\beta = 1$$

$$\text{οπότε: } (\epsilon): y = x + 1$$

- Γ.** Έχουμε: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta \mu \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 1$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\eta \mu \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = -1$$

$$\text{οπότε: } \lambda \cdot f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$\lambda \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = 2$$

$$\lambda = -4$$

ΘΕΜΑ 3ο

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ' τάξης ενός Λυκείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

Βάρος σε κιλά [-)	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i
45-55	0,2
55-65	0,5
65-75	
75-85	

- A.** Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη κλάση.

Μονάδες 8

- B.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων.

Μονάδες 9

- Γ.** Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 80 μαθητών ένα μαθητή.

- α.** Να βρείτε την πιθανότητα να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά.

Μονάδες 4

- β.** Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών.

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- A.** Αν F η αθροιστική συχνότητα και f η σχετική συχνότητα τότε

$$\text{Ισχύει: } F_1 = f_1 = 0,2$$

$$f_2 = F_2 - f_1 = 0,5 - 0,2 = 0,3$$

$$\text{οπότε: } f_3 = 2 \cdot f_1 = 2 \cdot 0,2 = 0,4$$

$$\text{και: } f_4 = 1 - f_1 - f_2 - f_3 = 1 - 0,2 - 0,3 - 0,4 = 0,1$$

Ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων είναι:

	Κεντρικές Τιμές x_i	N_i	f_i	F_i
[45 – 55)	50	16	0,2	0,2
[55 – 65)	60	24	0,3	0,5
[65 – 75)	70	32	0,4	0,9
[75 – 85)	80	8	0,1	1
ΣΥΝΟΛΟ		80	1	

- B.** Η μέση τιμή $\bar{x}$ είναι:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^4 x_i f_i = 50 \cdot 0,2 + 60 \cdot 0,3 + 70 \cdot 0,4 + 80 \cdot 0,1 =$$

$$= 10 + 18 + 28 + 8 = 64$$

άρα η μέση τιμή $\bar{x}$ των παραπάνω δεδομένων είναι 64.

- Γ.α.** Έστω A το ενδεχόμενο:
 "ο μαθητής να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά".
 Τότε:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{40}{80} = 0,5 \quad \text{ή} \quad 50\%.$$

- β.** Έστω B το ενδεχόμενο:
 "ο μαθητής να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 74 κιλών".
 Τότε:

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{56}{80} = 0,7 \quad \text{ή} \quad 70\%.$$

ΘΕΜΑ 4ο

Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για τον χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά.

Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

- A.** Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους.

Μονάδες 6

- B.** Να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

- Γ.** Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4.000, πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά.

Μονάδες 6

- Δ.** Μια μέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (CV).

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- A.** Επειδή έχουμε κανονική Κατανομή θα είναι:
 $\bar{x} = \delta$, άρα δεξιά της μέσης

τιμής θα υπάρχει το 50% των παρατηρήσεων, οπότε $\delta = 12 = \bar{x}$

Επειδή $50\% - 16\% = 34\% = \frac{68\%}{2}$ θα είναι:

$$\bar{x} - s = 10 \quad \text{ή} \quad 12 - s = 10 \quad \text{ή} \quad s = 2$$

- Β.** Θα υπολογίσουμε τον συντελεστή μεταβλητότητας CV . Έχουμε:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{12} \approx 0,1667 \quad \text{ή} \quad 16,67\%$$

Άρα επειδή ο CV είναι μεγαλύτερος από 10% το δείγμα **δεν** είναι ομοιογενές.

- Γ.** Το χρονικό διάστημα που μελετάμε είναι από 14 έως 16 λεπτά, ή από $\bar{x} + s$ έως $\bar{x} + 2s$. Οπότε το ποσοστό των μαθητών σ' αυτό το διάστημα είναι:

$$\frac{95\% - 68\%}{2} = 13,5\%$$

οπότε οι μαθητές που θα κάνουν χρόνο από 14 έως 16 λεπτά είναι:

$$4.000 \cdot \frac{13,5}{100} = 540$$

- Δ.** Με την καθυστέρηση των 5 λεπτών η νέα μέση τιμή $\bar{y}$ από γνωστή εφαρμογή γίνεται $\bar{y} = \bar{x} + 5 = 12 + 5 = 17$ λεπτά και η τυπική απόκλιση είναι: $s_y = s_x = 2$ (δεν μεταβάλλεται). Οπότε ο νέος συντελεστής μεταβολής είναι:

$$CV' = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{2}{17} \approx 0,1176 \quad \text{ή} \quad 11,76\%$$

οπότε η μεταβολή του συντελεστή μεταβολής είναι:

$$CV' - CV = 11,76\% - 16,67\%$$

δηλαδή ελλατώθηκε κατά 4,91%.