ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2.

Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 7,5

Α.2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z\bar{z}$

β. $|z^2| = z^2$

γ. $|z| = -|\bar{z}|$

δ. $|z| = |\bar{z}|$

ε. $|i\,\bar{z}| = |z|$

Μονάδες 5

Β.1. Αν $z_1 = 3+4i$ και $z_2 = 1-\sqrt{3}i$, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α		**Στήλη Β**	
1.	$|z_1 \cdot z_2|$	**α.**	4
2.	$|z_1^2|$	**β.**	2
3.	$|z_2|^2$	**γ.**	25
4.	$-|\bar{z}_1|$	**δ.**	−5
5.	$|i\,z_2|$	**ε.**	−2
		στ.	5
		ζ.	10

Μονάδες 7,5

Β.2. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α.1. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Α.2. α. $|z|^2 = z\bar{z}$ **Σωστό**

β. $|z^2| = z^2$ **Λάθος**

γ. $|z| = -|\bar{z}|$ **Λάθος**

δ. $|z| = |\bar{z}|$ **Σωστό**

ε. $|i\bar{z}| = |z|$ **Σωστό**

Β.1. $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

1. $|z_1 \cdot z_2|$ → **ζ.** 10

2. $|z_1{}^2|$ → **γ.** 25

3. $|z_2|^2$ → **α.** 4

4. $-|\bar{z}_1|$ → **δ.** -5

5. $|iz_2|$ → **β.** 2

Β.2. **Αφού** $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \le 3 \\ \dfrac{1 - e^{x-3}}{x - 3}, & x > 3 \end{cases}$$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι α = −1/9.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο Α(4, f(4)).

Μονάδες 7

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και x=2.

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$f(x)=\begin{cases} \alpha x^2 & , x \le 3 \\ \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3} & , x>3 \end{cases}$$

α. Αφού η f είναι συνεχής (άρα και στο $x_0 = 3$), θα ισχύει:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$$

έχουμε:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(\alpha x^2) = \alpha\cdot 3^2 = 9\alpha$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\frac{1-e^{x-3}}{x-3} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 3^+}\frac{(1-e^{x-3})'}{(x-3)'} = \lim_{x\to 3^+}\frac{-e^{x-3}\cdot(x-3)'}{1} =$$
$$\lim_{x\to 3^+}[-e^{x-3}] = -1$$

f(3) = 9α

Άρα 9α = -1 οπότε $\alpha = -\dfrac{1}{9}$

β. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Α(4, f(4)) είναι:

(ε) : $y - f(4) = f'(4)(x-4)$

έχουμε: $f(4) = \dfrac{1-e^{4-3}}{4-3} = 1-e$

- Για x > 3 έχουμε $f(x) = \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}$

$$f'(x) = \frac{(1-e^{x-3})'\cdot(x-3)-(1-e^{x-3})\cdot(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{-e^{x-3}\cdot(x-3)-1+e^{x-3}}{(x-3)^2} =$$
$$= \frac{-e^{x-3}\cdot x + 3e^{x-3} - 1 + e^{x-3}}{(x-3)^2} = \frac{4e^{x-3} - xe^{x-3} - 1}{(x-3)^2}$$

άρα $f'(4) = \dfrac{4e^{4-3} - 4e^{4-3} - 1}{(4-3)^2} = -1$

Άρα (ε): $y-(1-e) = -1(x-4)$
$y - 1 + e = -x + 4$

$$y=-x+5-e$$

γ) Θεωρούμε το $\alpha=-\dfrac{1}{9}$

Στο διάστημα που ολοκληρώνουμε η συνάρτηση έχει τύπο $f(x)=-\dfrac{1}{9}x^2<0$

$$\mathrm{E}=-\frac{1}{9}\int_1^2 -x^2dx=\frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{9}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}\cdot\frac{7}{3}=\frac{7}{27}\tau.\mu.$$

Προσδιορίσαμε το εμβαδόν του χωρίου για $\alpha=-\dfrac{1}{9}$. Επειδή δεν διευκρινίζεται αν θέλει το εμβαδόν για την τιμή $\alpha=-\dfrac{1}{9}$ ή για κάθε τιμή του α, έχουμε:

1. αν α = 0 δεν υπολογίζουμε το εμβαδόν αφού f(x) = 0 στο [1, 2]
2. αν α ≠ 0 τότε $\mathrm{E}=|\alpha|\int_1^2 x^2dx=|\alpha|\dfrac{7}{3}\tau.\mu.$

ΘΕΜΑ 3ο

Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (0,1).

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$f^3(x)+\beta\cdot f^2(x)+\gamma\cdot f(x)=x^3-2x^2+6x-1$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε:

$$3f^2(x)\cdot f'(x)+2\beta\cdot f(x)\cdot f'(x)+\gamma\cdot f'(x)=3x^2-4x+6$$

$$f'(x)[3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma]=3x^2-4x+6 \qquad (1)$$

Θέτω f(x) = y οπότε θεωρώντας τη συνάρτηση $g(y)=3y^2+2\beta y+\gamma$

η $\Delta=4\beta^2-12\gamma=4(\beta^2-3\gamma)<0$ από υπόθεση.

Άρα για κάθε $y\in R$ $g(y)>0$ και επειδή $3x^2-4x+6>0$
για κάθε $x\in R$ αφού $\Delta'=16-72=-56<0$

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$, οπότε:

α) Δεν έχει ακρότατα αφού $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ (από θ. Fermat).

β) Και η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

γ) ⇨ Η f είναι συνεχής στο [0, 1] αφού είναι παραγωγίσιμη.

⇨ Για x = 0 η δοσμένη σχέση γίνεται:

$f^3(0)+\beta\cdot f^2(0)+\gamma\cdot f(0)=-1$ ή
$f(0)[f^2(0)+\beta\cdot f(0)+\gamma]=-1$

Επειδή $f^2(0)+\beta\cdot f(0)+\gamma>0$
Άρα $f(0)<0$

Όμοια $f^3(1)+\beta\cdot f^2(1)+\gamma\cdot f(1)=4$
$f(1)[f^2(1)+\beta\cdot f(1)+\gamma]=4$

Επειδή $f^2(1)+\beta\cdot f(1)+\gamma>0$
Άρα $f(1)>0$

Οπότε $f(0)\cdot f(1)<0$

Άρα από θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_0\in(0,1)$ της εξίσωσης f(x) = 0.

Επίσης επειδή η f γνησίως αύξουσα στο R, άρα και στο (0, 1) η f είναι “1–1” άρα η ρίζα είναι μοναδική στο (0, 1).

ΘΕΜΑ 4ο
Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών **R**, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$

ii) $f(x)=1-2x^2\int_0^1 tf^2(xt)dt$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}-x^2 , \quad \text{για κάθε } x\in \mathbf{R}.$$

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x)=-2xf^2(x)$

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

Μονάδες 4

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2} .$$

Μονάδες 4

δ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}$ (x f(x) ημ2x).

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Θέτω $u=xt$

Τότε $du=x\cdot dt$

$u_1=x\cdot 0=0$

$u_2=x\cdot 1=x$

$$f(x)=1-2\int_0^1 x^2\cdot t\cdot f^2(xt)dt=1-2\int_0^1 x\cdot t\cdot f^2(xt)\cdot xdt$$

άρα $f(x)=1-2\int_0^x uf^2(u)du$

επομένως $f'(x)=-2xf^2(x), \quad x\in R$

β) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$g'(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}-2x=-\frac{-2xf^2(x)}{f^2(x)}-2x=2x-2x=0$$

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή.

γ) Από ερώτημα α) έχουμε:

$f'(x)=-2xf^2(x)$ ή

$$\frac{-f'(x)}{f^2(x)}=2x$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=2x$$

άρα $\int \left(\frac{1}{f(x)}\right)' dx = \int 2x dx \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = x^2 + c \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + c}$

Όμως $f(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{0^2 + c} = 1 \Leftrightarrow c = 1$

Επομένως $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

γ) Έχουμε $\lim_{x \to +\infty} (x \cdot f(x) \cdot \eta\mu 2x) = \lim_{x \to +\infty} (x \frac{1}{x^2 + 1} \eta\mu 2x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} \eta\mu 2x$

όμως $\left| \frac{x}{x^2 + 1} \cdot \eta\mu 2x \right| \leq \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right|$

$$-\frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2 + 1} \eta\mu 2x \leq \frac{x}{x^2 + 1}$$

Επειδή $\lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = 0$ και $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$

άρα από κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} \cdot \eta\mu 2x = 0$