

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Έστω α, β, γ ακέραιοι αριθμοί. Να δείξετε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

α. Αν $\alpha \mid \beta$, τότε $\alpha \mid \lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ .

Μονάδες 4

β. Αν $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid (\beta + \gamma)$.

Μονάδες 4

A.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Έστω α, β φυσικοί αριθμοί και u το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον $\beta \neq 0$. Τότε:

α. $(\alpha, \beta) < (\beta, u)$

β. $(\alpha, \beta) = (\beta, u)$

γ. $(\alpha, \beta) > (\beta, u)$

δ. $(\alpha, \beta) = (\beta, u) + 1$

όπου (α, β) είναι ο Μ.Κ.Δ. των φυσικών αριθμών α, β .

Μονάδες 4,5

B.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν $7 \mid (\alpha + 5)$ και $7 \mid (40 - \beta)$ τότε:

α. $7 \mid (\alpha + \beta)$,

β. $7 \mid (\alpha + \beta + 1)$,

γ. $7 \mid (\alpha + \beta + 2)$,

δ. $7 \mid (\alpha + \beta - 3)$.

Μονάδες 4

B.2. Να προσδιορίσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4,5

B.3. Να εκφράσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112 ως γραμμικό συνδυασμό των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A.1. Σχολικό βιβλίο σελ. 147 (iii και iv)

A.2. **β.** $(\alpha, \beta) = (\beta, u)$

B.1. Αν $7 \mid (\alpha + 5)$ και $7 \mid (40 - \beta)$ τότε:

$$\begin{array}{ll} 7 \mid (\alpha + 5) & \alpha = 7\kappa - 5 \\ 7 \mid (40 - \beta) & \beta = 40 - 7\lambda \end{array}$$

α. $7 \mid (\alpha + \beta)$

B.2.

$$\begin{array}{r|l} 112 & 72 \\ 40 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 72 & 40 \\ 32 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 40 & 32 \\ 8 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 32 & 8 \\ 0 & 4 \end{array}$$

$$(112, 72) = (72, 40) = (40, 32) = (32, 8) = 8$$

B.3. $8 = 40 - 32 = 40 - (72 - 40) = -72 + 2 \cdot 40 =$
 $= -72 + 2(112 - 72) = 2 \cdot 112 - 3 \cdot 72$

ΘΕΜΑ 2ο

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=2$ και

$$(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}. \text{ Έστω τα διανύσματα } \vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}.$$

Να υπολογίσετε:

α. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 5

β. τα μέτρα $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$

Μονάδες 8

γ. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Μονάδες 7

δ. το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α.
$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

β.

$$|\vec{u}|^2 = |2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}|^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha}\vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 = 4 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 2^2 = 52 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|^2 = \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 2^2 = 13 \Leftrightarrow |\vec{v}| = \sqrt{13}$$

γ.
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 = 2 \cdot 1^2 - 1 - 6 \cdot 2^2 = -23$$

δ.
$$\sigma\upsilon\nu(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-23}{2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = \frac{-23}{26}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$.

α. Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 .

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι κάθετες.

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε ένα σημείο $M(\kappa, \lambda)$ με $\kappa > 0$ και $\lambda > 0$ τέτοιο, ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3, \kappa)$ να είναι παράλληλο προς τη μία από τις δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 και το διάνυσμα $\vec{\beta} = (-16, 4\lambda)$ να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.

Μονάδες 6

- δ. Να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων Ο, άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο Μ.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$

$$x^2 + 6x + 9 - y^2 = 0$$

$$(x + 3)^2 - y^2 = 0$$

$$(x + 3 + y)(x + 3 - y) = 0$$

$$x + y + 3 = 0 \quad \text{ή} \quad x - y + 3 = 0$$

Άρα η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$ παριστάνει
τις ευθείες $\varepsilon_1: x + y + 3 = 0$
 $\varepsilon_2: x - y + 3 = 0$

- β. Οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι:

$$\lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$\lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{1}{-1} = 1$$

Άρα $\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1$ οπότε $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

- γ. 1^η περίπτωση.

Έστω $\vec{\alpha} // \varepsilon_1$ Έχουμε $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{\kappa}{3}$

$\vec{\beta} // \varepsilon_2$ Έχουμε $\lambda_{\vec{\beta}} = \frac{4\lambda}{-16} = -\frac{\lambda}{4}$

Τότε $\lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\varepsilon_1} \Rightarrow \frac{\kappa}{3} = -1 \Rightarrow \kappa = -3$ **Απορρίπτεται** γιατί $\kappa > 0$

2^η περίπτωση.

Έστω $\vec{\alpha} // \varepsilon_2$

$\vec{\beta} // \varepsilon_1$

Τότε $\lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\varepsilon_2} \Rightarrow \frac{\kappa}{3} = 1 \Rightarrow \kappa = 3$

και $\lambda_{\vec{\beta}} = \lambda_{\varepsilon_1} \Rightarrow -\frac{\lambda}{4} = -1 \Rightarrow \lambda = 4$ **Δεκτή**

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το Μ(3, 4)

- δ. Η εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων 0 και άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ είναι της μορφής $y^2 = 2\rho x$.

Επειδή διέρχεται από το $M(3, 4)$, άρα:

$$4^2 = 2\rho \cdot 3 \Leftrightarrow 16 = 6\rho \Rightarrow \rho = \frac{16}{6} \Rightarrow \rho = \frac{8}{3}$$

Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = \frac{16}{3}x$

ΘΕΜΑ 4ο

- A.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ, λ , η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O .

Μονάδες 7

- B.** Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.

- α.** Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ για τις διάφορες τιμές των μ και λ , έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

- β.** Να βρείτε τα μ, λ έτσι, ώστε, αν A, B είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x + y + 2 = 0$, να ισχύει $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

Μονάδες 6

- γ.** Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα **β** να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AOB .

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- A.** Έχουμε $(6\mu)^2 + (8\lambda)^2 = 36\mu^2 + 64\lambda^2 > 0$
για κάθε $\mu, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

Άρα η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ παριστάνει κύκλο.

Επίσης $0^2 + 0^2 + 6\mu \cdot 0 + 8\lambda \cdot 0 = 0$, ισχύει,
Οπότε ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων O .

- B. α).** $(6\mu)^2 + (8\lambda)^2 = 36\mu^2 + 64\lambda^2 = 4(9\mu^2 + 16\lambda^2)$

Άρα για $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ με $|\mu| + |\lambda| \neq 0$ η εξίσωση παριστάνει
Κύκλο με κέντρο $K(-3\mu, -4\lambda)$

και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{4(9\mu^2 + 16\lambda^2)}}{2} = \sqrt{9\mu^2 + 16\lambda^2}$

Έστω $x = -3\mu \Leftrightarrow \mu = -\frac{x}{3}$

$$y = -4\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{y}{4}$$

Τότε αντικαθιστώντας στην $3\mu + 2\lambda = 0$ έχουμε $2x + y = 0$

Άρα τα κέντρα τους είναι στην ευθεία $2x + y = 0$ που επειδή ισχύει $2 \cdot 0 + 0 = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Ισχύει $3\mu + 2\lambda = 0$ δηλ. $3\mu = -2\lambda$ (1) οπότε

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{array} \right\} \xRightarrow{(1)} \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 4\lambda x + 8\lambda y = 0 \\ y = -x - 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (2) \\ (3) \end{array} \quad \text{δηλαδή}$$

Η (2) μέσω της (3) γίνεται

$$\begin{aligned} x^2 + (-x-2)^2 - 4\lambda x + 8\lambda(-x-2) &= 0 \Leftrightarrow \\ 2x^2 + (4-12\lambda)x + 4-16\lambda &= 0 \Leftrightarrow x^2 + (2-6\lambda)x + 2-8\lambda = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Η εξίσωση (4) έχει δύο λύσεις αφού η ευθεία με τον κύκλο έχουν δύο κοινά σημεία.

$$\Delta = 4(9\lambda^2 + 2\lambda - 1) > 0$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } x_1 &= 3\lambda - 1 + \sqrt{9\lambda^2 + 2\lambda - 1} \rightarrow y_1 = -3\lambda - 1 - \sqrt{9\lambda^2 + 2\lambda - 1} \\ x_2 &= 3\lambda - 1 - \sqrt{9\lambda^2 + 2\lambda - 1} \rightarrow y_2 = -3\lambda - 1 + \sqrt{9\lambda^2 + 2\lambda - 1} \end{aligned}$$

$$\text{όμως } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \Leftrightarrow (x_1, y_1)(x_2, y_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

$$\begin{aligned} (3\lambda - 1)^2 - (\sqrt{9\lambda^2 + 2\lambda - 1})^2 + (-3\lambda - 1)^2 - (\sqrt{9\lambda^2 + 2\lambda - 1})^2 &= 0 \\ 9\lambda^2 - 6\lambda + 1 - 9\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 9\lambda^2 + 6\lambda + 1 - 9\lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0 \\ -4\lambda = -4 \Rightarrow \lambda &= 1 \end{aligned}$$

$$(1) \Rightarrow 3\mu = -2 \Rightarrow \mu = -\frac{2}{3}$$

γ) Για $\lambda=1$, $\mu = -\frac{2}{3}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - 1 + \sqrt{9 + 2 - 1} = 2 + \sqrt{10} \rightarrow y_1 = -4 - \sqrt{10} \\ x_2 &= 3 - 1 - \sqrt{9 + 2 - 1} = 2 - \sqrt{10} \rightarrow y_2 = -4 + \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } A(2 + \sqrt{10}, -4 - \sqrt{10}), \quad B(2 - \sqrt{10}, -4 + \sqrt{10})$$

Τότε

$$\begin{aligned} E_{AOB} &= \frac{1}{2} |\det(\vec{OA}, \vec{OB})| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 + \sqrt{10} & -4 - \sqrt{10} \\ 2 - \sqrt{10} & -4 + \sqrt{10} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} |(2 + \sqrt{10})(-4 + \sqrt{10}) - (2 - \sqrt{10})(-4 - \sqrt{10})| = 2\sqrt{10}\tau. \mu. \end{aligned}$$

β' τρόπος για το 4^ο Θέμα Β. β, γ

β) Έχουμε από το Θέμα 4Α το Ο σημείο του κύκλου. Επίσης Α, Β σημεία του κύκλου με

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \Leftrightarrow \vec{OA} \perp \vec{OB}$$

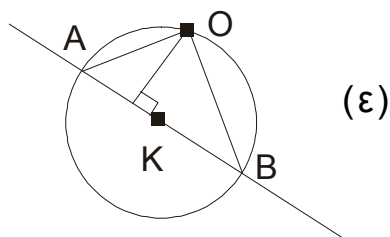
Άρα η $\widehat{AOB} = 90^\circ$ οπότε ΑΒ διάμετρος του κύκλου.

Επομένως η ευθεία $x + y + 2 = 0$ διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, οπότε:

$$\left. \begin{array}{l} -3\mu - 4\lambda + 2 = 0 \\ 3\mu + 2\lambda = 0 \end{array} \right\} \text{ άρα } 2\lambda - 4\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\text{και } 3\mu + 2 = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{2}{3}$$

γ)



Το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο στο Ο.

$$d(O, AB) = \frac{|0 + 0 + 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$(AB) = 2\rho = 2\sqrt{9\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 16 \cdot 1^2} = 2\sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{20} = 2\sqrt{2}\tau\mu.$$

$$\text{Άρα } E_{AOB} = \frac{1}{2}(AB) \cdot d(O, AB) = 2\sqrt{10}\tau\mu.$$