

ΘΕΜΑ 1ο

- A1.** Να αποδείξετε ότι, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, ισούται με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα.

Μονάδες 6,5

- A2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, έτσι ώστε να προκύπτει ισότητα.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) και AD το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. AB^2	1. $AB^2 + B\Gamma^2$
β. $A\Gamma^2$	2. $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$
γ. $\frac{AB^2}{A\Gamma^2}$	3. $\frac{\Gamma\Delta}{B\Delta}$
	4. $B\Gamma \cdot B\Delta$
	5. $B\Gamma^2 - AB^2$
	6. $AB \cdot B\Gamma$

Μονάδες 6

- B.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα **B1** και **B2**.

Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) με ύψος AD , για το οποίο έχουμε $B\Delta=1$ και $B\Gamma=3$.

- B1.** Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AD είναι:

α. 2 **β.** $\sqrt{3}$ **γ.** $\sqrt{2}$ **δ.** $3\sqrt{2}$

Μονάδες 6,5

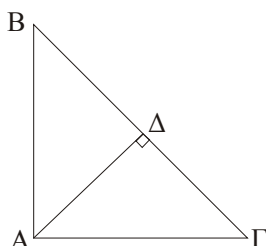
- B2.** Το μήκος της πλευράς AB είναι:

α. $\sqrt{3}$ **β.** 3 **γ.** $\sqrt{2}$ **δ.** $\sqrt{5}$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- A.1.** Θεώρημα 9.4 σελ. 211 σχολικού βιβλίου



A.2.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. AB^2	4. $B\Gamma \cdot B\Delta$
β. AG^2	5. $B\Gamma^2 - AB^2$
γ. $\frac{AB^2}{AG^2}$	2. $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$

B.1. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ είναι:

γ. $\sqrt{2}$

γιατί: $AD^2 = BD \cdot \Delta\Gamma = 1 \cdot 2 = 2$

B.2. Το μήκος της πλευράς ΑΒ είναι:

α. $\sqrt{3}$

γιατί: $AB^2 = BD \cdot B\Gamma = 1 \cdot 3 = 3$

ΘΕΜΑ 2ο

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ΑΒ=6, ΒΓ=12 και ΓΑ=8.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι αμβλυγώνιο.

Μονάδες 7

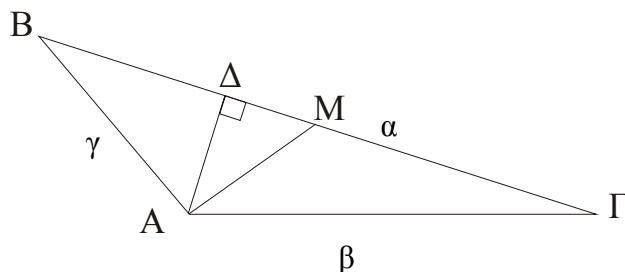
β. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

Μονάδες 9

γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ.

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



α.

$$\left. \begin{array}{l} B\Gamma^2 = 12^2 = 144 \\ AB^2 + A\Gamma^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \end{array} \right\} \begin{array}{l} B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2 \\ \hat{A} > 90^\circ \end{array}$$

$$\beta. \quad AM^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \frac{128 + 72 - 144}{4} = \frac{56}{4} = 14$$

$$AM = \sqrt{14}$$

$$\gamma. \quad \Delta M = \text{προβ}_{\alpha} \mu_{\alpha} = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\alpha} = \frac{64 - 36}{2 \cdot 12} = \frac{7}{6}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες $\hat{xOy}$, $\hat{yOz}$, $\hat{zOx}$ έτσι ώστε $\hat{xOy} = \hat{yOz} = 150^\circ$. Στις ημιευθείες Ox , Oy , Oz παίρνουμε τα σημεία A , B , Γ αντίστοιχα έτσι ώστε $OA=2$, $OB=4$ και $O\Gamma=6$.

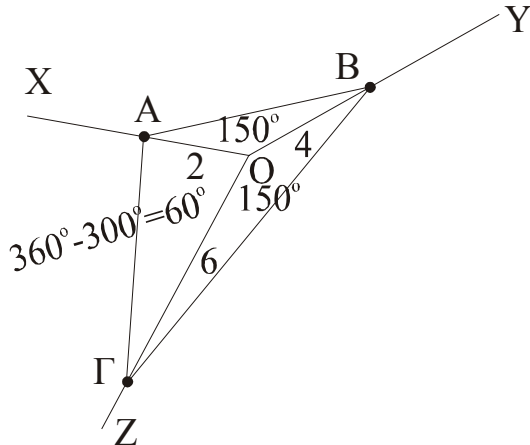
α. Να υπολογίσετε το εμβαδό $E_{O\Gamma A}$ του τριγώνου $O\Gamma A$.

Μονάδες 12

β. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{E_{OAB}}{E_{OB\Gamma}}$.

Μονάδες 13

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



$$\alpha. \quad (O\Gamma A) = \frac{1}{2} O\Gamma \cdot OA \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\tau.μ.$$

β. Επειδή $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ παίρνουμε τον λόγο των εμβαδών:

$$\frac{(OAB)}{(OB\Gamma)} = \frac{OA \cdot OB}{OB \cdot O\Gamma} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου O και διαμέτρου $AB=2R$. Στην προέκταση του AB προς το B , θεωρούμε ένα σημείο Γ , τέτοιο ώστε $B\Gamma=2R$. Από το Γ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα GE του ημικυκλίου. Η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο A τέμνει την προέκταση του τμήματος GE στο σημείο Δ .

α. Να αποδείξετε ότι $GE = 2\sqrt{2} R$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι $GA \cdot GO = GD \cdot GE$.

Μονάδες 10

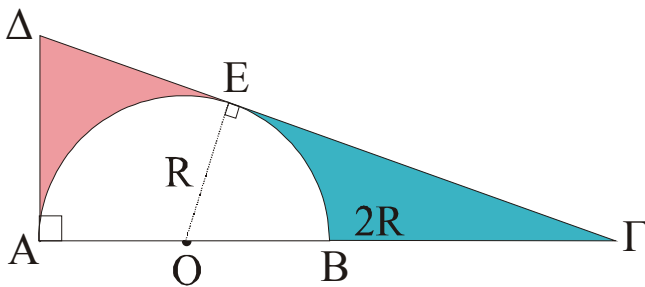
γ. Να υπολογίσετε το τμήμα GD συναρτήσει του R .

Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε το άθροισμα των εμβαδών των μικτόγραμμων τριγώνων BGE και ADE συναρτήσει του R .

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



α. $GE^2 = GO^2 - OE^2 = (3R)^2 - R^2 = 8R^2$

$$GE = 2\sqrt{2}R$$

β. Το $OADE$ είναι εγγράψιμο διότι $\hat{A} + \hat{E} = 180^\circ$.
Εφαρμόζοντας το θεώρημα για τις τέμνουσες από το σημείο Γ εκτός κύκλου έχουμε:
 $GO \cdot GA = GE \cdot GD$

γ. $GD = \frac{GO \cdot GA}{GE} = \frac{3R \cdot 4R}{2\sqrt{2}R} = \frac{6R\sqrt{2}}{2} = 3R\sqrt{2}$

δ. $AD^2 = GD^2 - AG^2 = 18R^2 - 16R^2 = 2R^2$

$$AD = R\sqrt{2}$$

Το άθροισμα των εμβαδών των μικτόγραμμων τριγώνων BGE και ADE είναι:

$$E = E_{\triangle ADE} - E_{\eta\mu.} = \frac{AG \cdot AD}{2} - \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4R \cdot R\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi R^2}{2} = \frac{(4\sqrt{2} - \pi)R^2}{2}$$