ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0,$$

με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Μονάδες 6,5

Α.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Έστω πολυώνυμο P(x) και ρ ένας πραγματικός αριθμός. Αν το P(x) έχει παράγοντα το x–ρ και π(x) είναι το πηλίκο της διαίρεσης του P(x) με το x–ρ, τότε:

α. $P(x) = (x - \rho)\,\pi(x) + 1$

β. $\pi(x) = (x - \rho)\,P(x)$

γ. ο βαθμός του υπολοίπου της διαίρεσης του P(x) με το x-ρ είναι ίσος με μηδέν

δ. $P(\rho) = 0$.

Μονάδες 6

Β.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η εξίσωση $3x^3 - 5x + 6 = 0$ έχει ρίζα το 4 .

β. Η εξίσωση $4x^4 + 5x^2 + 7x + 4 = 0$ έχει ρίζα το 2 .

γ. Η εξίσωση $6x^6 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$ δεν έχει ρίζα το – 3 .

Μονάδες 6

Β.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Το πολυώνυμο $P(x) = (4x + 5)^{2004} + x^{2001}$ έχει παράγοντα το:

α. $x + 1$ **β.** $x - 1$ **γ.** x **δ.** $x + \frac{5}{4}$.

Μονάδες 6,5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α.1. Σελ. 74 σχολικού βιβλίου (Θεωρ. Ακεραίων Ριζών).

Α.2. Έστω πολυώνυμο P(x) και ρ ένας πραγματικός αριθμός. Αν το P(x) έχει παράγοντα και το x – ρ και π(x) είναι το πηλίκο της διαίρεσης του P(x) με το x – ρ, τότε:
δ. $P(\rho) = 0$

Β.1.α. Η εξίσωση $3x^3 - 5x + 6 = 0$ έχει ρίζα το 4. ***Λάθος***
β. Η εξίσωση $4x^4 + 5x^2 + 7x + 4 = 0$ έχει ρίζα το 2. ***Λάθος***

γ. Η εξίσωση $6x^6 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$ δεν έχει ρίζα το -3 ***Σωστό***

Β.2. Το πολυώνυμο $P(x) = (4x + 5)^{2004} + x^{2001}$ έχει παράγοντα το:
α. $x + 1$
$P(-1) = 1^{2004} + (-1)^{2001} = 1 - 1 = 0$

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u>

Για τη γωνία α ισχύει ότι

$$5\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha - 14\ \sigma\upsilon\nu\alpha - 7 = 0\ .$$

α. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\dfrac{3}{5}$.

Μονάδες 10

β. Αν επιπλέον ισχύει $\pi \le \alpha \le \dfrac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημ2α, συν2α και εφ2α.

Μονάδες 15

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$5\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha - 14\ \sigma\upsilon\nu\alpha - 7 = 0$

α. $5(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1) - 14\ \sigma\upsilon\nu\alpha - 7 = 0$
…………………………………….
$5\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 7\sigma\upsilon\nu\alpha - 6 = 0$

$\Delta = 169$

άρα
$\sigma\upsilon\nu\alpha = -\dfrac{3}{5}$
$\sigma\upsilon\nu\alpha = 2$ ***απορρίπτεται*** διότι $-1 \le \sigma\upsilon\nu\alpha \le 1$

άρα: $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\dfrac{3}{5}$

β. $\pi \le \alpha \le \dfrac{3\pi}{2}$ Τότε ημα < 0 και συνα <0
ημ2α = 2ημασυνα
$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$

$\sigma\upsilon\nu\alpha = -\dfrac{3}{5}$

$$\eta\mu\alpha = -\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = -\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2} = -\frac{4}{5}$$

Άρα $\eta\mu 2\alpha = 2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25}$$

$$\varepsilon\phi 2\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = -\frac{24}{7}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Ο τρίτος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι ίσος με α_3 = log125 και η διαφορά της είναι ίση με ω = log5.

α. Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος α_1 της προόδου είναι ίσος με τη διαφορά ω.

Μονάδες 8

β. Να υπολογίσετε το άθροισμα Α = $\alpha_{21} + \alpha_{22} + ... + \alpha_{29}$.

Μονάδες 8

γ. Έστω (β_ν) μία γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1 = \alpha_1$ και $\beta_2 = \alpha_2$, όπου α_1 και α_2 ο πρώτος και ο δεύτερος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το άθροισμα Β = $\beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + ... + \beta_{1999} + \beta_{2001}$.

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. $\alpha_3 = \log 5^3 = 3\log 5$ και $\omega = \log 5$

$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\omega \Leftrightarrow$

$\alpha_1 = \alpha_3 - 2\omega = 3\log 5 - 2\log 5 = \log 5 = \omega$

β. $\alpha_{21} = \alpha_1 + 20\omega = \log 5 + 20\log 5 = 21\log 5$

$\alpha_{29} = \alpha_1 + 28\omega = 29\log 5$

$$\mathrm{A} = \Sigma_9 = \frac{(\alpha_{21} + \alpha_{29})9}{2} = \frac{(21+29)\log 5}{2} 9 = 225 \cdot \log 5$$

β΄ τρόπος

Το ζητούμενο άθροισμα Α = $\alpha_{21} + \alpha_{22} + ... + \alpha_{29}$ μπορεί να βρεθεί και ως εξής:

$$A = S_{29} - S_{20} = \frac{29}{2}[2\alpha_1 + 28 \cdot \omega] - \frac{20}{2}[2\alpha_1 + 19\omega] = ... = 225 \cdot \log 5$$

γ. Θεωρώ την γεωμετρική πρόοδο γ_ν με $\gamma_1 = \beta_1 = \log 5$ και $\lambda = 4$.

$\gamma_\nu = \beta_{2001} \Leftrightarrow \log 5 \cdot 4^{\nu-1} = \log 5 \cdot 2^{2000} \Leftrightarrow \nu = 1001$

άρα $S_{1001} = \gamma_1 \frac{\lambda^{\nu}-1}{\lambda-1} = \log 5 \frac{4^{1001}-1}{3}$

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Έστω Q(t) η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές), t έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300.000 δραχμές, ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει

$\ln Q(t) = \alpha t + \beta$, $t \geq 0$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε:

α. να δείξετε ότι $Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}$, $t \geq 0$,

Μονάδες 10

β. να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με 1/16 της αρχικής του τιμής,

Μονάδες 8

γ. να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το 1/9 της αρχικής του τιμής.

Μονάδες 7

Αφού η μέτρηση είναι σε εκατοντάδες χιλιάδες τότε οι 300.000 δραχμές είναι 3 μονάδες.
Αφού ο χρόνος μετριέται σε έτη, άρα οι 6 μήνες είναι ½ μονάδα.

α. $Q(0) = 3 \Leftrightarrow \ln 3 = \beta$

$Q(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln\frac{3}{2} = \alpha\frac{1}{2} + \ln 3 \Leftrightarrow \alpha = -\ln 4$

άρα $\ln Q(t) = (-\ln 4)t + \ln 3 \Leftrightarrow Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}$

β. $Q(t) = \frac{1}{16}Q(0) \Leftrightarrow 3 \cdot 4^{-t} = \frac{1}{16}3 \Leftrightarrow t = 2$

γ. $Q(t) \leq \frac{1}{9}Q(0) \Leftrightarrow 3 \cdot 4^{-t} \leq \frac{1}{9}3 \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln 9}{\ln 4}$

άρα ο ελάχιστος χρόνος είναι $t = \frac{\ln 9}{\ln 4} = \frac{\ln 3}{\ln 2}$